

## BİREYSEL

1)  $10^{2010} - 1$  sayısını bölen ve  $3^3$  ün kuvveti olan en büyük sayı kaçtır?

**Çözüm:**  $10^{2010} - 1 = (10 - 1)(10^{2009} + 10^{2008} + \dots + 10 + 1) = 9M$   
ve  $M \equiv 2010 \pmod{9}$  dur.  $2010 \equiv 3 \pmod{9}$  olduğu için  $M = 3 + 9K$  olarak yazılabilir  
ve dolayısıyla  $10^{2010} - 1 = 9(3 + 9K) = 27 + 81K$  olduğundan bu ifadeyi bölen  
en büyük sayı 27 dir.

**YANIT:** 27

2)  $A = (1, \sqrt{3})$  ve  $B = (3, -\sqrt{3})$  olsun.  $x = \frac{5}{2}$  doğrusu üzerinde  
öyle  $C$  noktaları bulunuz ki  $\angle ACB$  açısı dik olsun.

**Çözüm:**  $AB$  nin uzunluğu 4 ve orta noktası  $(2, 0)$  dır. Öyleyse  $AB$  yi dik açı altında  
gören noktalar,  $AB$  nin orta noktası  $O = (2, 0)$  merkezli ve  $r = 2$   
yarıçaplı çemberdir.  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ .  
 $x = \frac{5}{2}$  ile kesim noktaları da,  $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$  olduğundan, istenen 2 nokta bulunmuş olur.

**YANIT:**  $\left(\frac{5}{2}, \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

3) 27000001 sayısının asal çarpanlarının toplamı kaçtır?

**Çözüm:**  $10 = x$  olsun. O zaman,  
 $27 \cdot 10^6 + 1 = 3^3 x^6 + 1 = (3x^2)^3 + 1 = (3x^2 + 1)(9x^4 - 3x^2 + 1)$   
 $= (3x^2 + 1)((9x^4 + 6x^2 + 1) - 9x^2)$   
 $= (3x^2 + 1)((3x^2 + 1)^2 - (3x)^2)$   
 $= (3x^2 + 1)(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 3x + 1)$

$x$  yerine 10 yazılırsa

$27000001 = 301 \cdot 331 \cdot 271 = 7 \cdot 43 \cdot 271 \cdot 331$  elde edilir.

Böylece, asal çarpanların toplamı 652 olur.

**YANIT:** 652

4)  $|3x - 18| + |2y + 7| \leq 3$  eşitsizliği ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.

**Çözüm:**  $u = x - 6, v = y + \frac{7}{2}$  dönüşümü yapılırsa eşitsizlik,  
 $3|u| + 2|v| \leq 3$  halini alır.  $u, v$  düzleminde  $u$  ve  $v$ 'nin sıfırdan büyük ve sıfırdan küçük  
olma durumu ile ilgili, bölgenin sınırları için aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$3u + 2v = \pm 3$$

$$3u - 2v = \pm 3$$

Bu doğruların kesiştiği noktalar,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, \frac{3}{2})$ ,  $(0, -\frac{3}{2})$

bir eşkenar dörtgen oluşturur. Bu eşkenar dörtgenin köşegenlerinin uzunlukları ise 2 ve 3'tür.

Dolayısıyla alan  $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$  olarak bulunur.

**YANIT:** 3

5)  $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$  denklemini sağlayan tüm  $x$  ve  $y$  pozitif tam sayılarını bulunuz.

**Çözüm:** Eşitliğin her yanını 4 ile çarpıp 1 ekleyerek

$$4(x^2 + x) + 1 = 4(y^4 + y^3 + y^2 + y) + 1$$

$$(2x + 1)^2 = (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1$$

$$= (2y^2 + y + 1)^2 - (y^2 - 2y)$$

elde ederiz.  $3y^2 + 4y + 1 > 0$  ve  $y$  pozitif tam sayısı 1 ve 2 değilse,  $y^2 - 2y > 0$  olur.

Bu takdirde  $(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2$  sağlanmalıdır.

$(2x + 1)^2$  sayısı ardışık iki tam kare arasında bulunduğu için, kendisi bir tam kare olamaz. Öyleyse,  $y = 1$  için  $x^2 + x = 4$  ün pozitif tam sayılar kümesinde çözümü yoktur.

$y = 2$  için ise  $x^2 + x = 30 \Rightarrow x = 5$  olacaktır.

**YANIT:**  $x = 5, y = 2$ .

6)  $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$  denkleminin tüm gerçel çözümlerini bulunuz.

**Çözüm:**  $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + xy + 2 = 0$

olduğundan  $x$  ve  $y$  ters işaretli olmalıdır. Denklem ifadesi düzenlendiğinde,

$(x + y - 1)^2 - xy + 3 = 0$  bulunur.

Dolayısıyla  $x$  ve  $y$ 'nin ters işaretli olması mümkün değildir.

Yani bir çelişki söz konusudur. Denklem çözümü yoktur.

**YANIT:**  $\emptyset$

7)  $4^9 + 9^4$  sayısının en büyük asal çarpanı nedir?

**Çözüm:** İfadeye  $4^9 + 9^4 = 4(16)^4 + 9^4$  şeklinde bir düzenleme yapılabilir.

Şimdi  $16 = x, 9 = y$  olarak belirleyelim.

Bu haliyle ifadeyi çarpanlarına ayıracak olursak,

$$4x^4 + y^4 = (4x^4 + 4x^2y^2 + y^4) - 4x^2y^2 = (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2$$

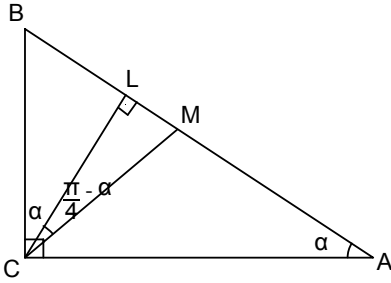
$$= (2x^2 + y^2 + 2xy)(2x^2 + y^2 - 2xy)$$

elde edilir.  $x = 16, y = 9$  olarak yerine yazılırsa,  $4^9 + 9^4 = 881 \cdot 305$  olarak bulunur. 881 sayısının da asal olduğu kolayca görülür.

**YANIT:** 881

8) Bir dik üçgende hipotenüse indirilen yüksekliğin uzunluğu  $l$ , açığortayın uzunluğu  $m$  ise üçgenin alanını hesaplayınız.

**Çözüm:**



$$m(\widehat{LCM}) = m(\widehat{ACL}) - m(\widehat{ACM}) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{|CL|}{|CM|} = \frac{l}{m}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}|AC||BC| = \frac{1}{2} \frac{l}{\sin\alpha} \frac{l}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{l^2}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{l^2}{\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)} = \frac{l^2}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)-1} = \frac{l^2}{2\frac{l^2}{m^2}-1} = \frac{m^2 l^2}{2l^2-m^2}$$

**YANIT:**  $\frac{m^2 l^2}{2l^2-m^2}$

9)  $a + b + c = 5$  ve  $1 \leq a, b, c \leq 2$  ise  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$  ifadesinin alabileceği minimum değer kaçtır?

**Çözüm:**  $f(a, b, c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$  fonksiyonu minimum değerini  $(a_0, b_0, c_0)$  noktasında alsın. Burada,  $b_0 = 2$  olmalıdır. Çünkü,  $b_0 < 2$  olduğunu varsayarsak  $a_0 > 1$  olur ve  $\min(2 - b_0, a_0 - 1) = \varepsilon > 0$  dir. Bu durumda

$$f(a_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon, c_0) = \frac{1}{a_0 + b_0} + \frac{1}{b_0 + c_0 + \varepsilon} < \frac{1}{a_0 + b_0} + \frac{1}{b_0 + c_0}$$

olması  $f$  nin minimum değerini  $(a_0, b_0, c_0)$  noktasında alması ile çelişir. Dolayısıyla,  $b_0 = 2$  dir.

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{c+2} = \frac{a+c+4}{(a+2)(c+2)} = \frac{7}{(a+2)(c+2)}$$

"ac" çarpımının maksimum olması için bu sayıların eşit olması gerekir,

yani  $a = c = \frac{3}{2}$ . Böylece bu ifadenin alacağı minimum değer  $\frac{4}{7}$  dir.

**YANIT:**  $\frac{4}{7}$

10)  $n > 0$  bir tam sayı olsun.

$$\frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} + \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x} = 4$$

denkleminin  $(0, \frac{\pi}{2})$  aralığındaki bütün çözümleri bulunuz.

**Çözüm:** Eşitliğin iki yanında bulunan ifadeleri " $\sin x \cos x$ " ile çarpıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak;

$$\frac{\sin^{n+1} x}{\cos^{n+1} x} + \frac{\cos^{n+1} x}{\sin^{n+1} x} = 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x$$

eşitliğini elde ederiz.

$|a + \frac{1}{a}| \geq 2$  eşitsizliğinden,

$\sin 2x = \pm 1$  olur.

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$  olduğu için  $x = \frac{\pi}{4}$  olmak zorundadır.

**YANIT:**  $\frac{\pi}{4}$

11)  $a + b \leq c$  koşulunu sağlayan pozitif tam sayılar kümesinde  $kabc \leq a^3 + b^3 + c^3$  eşitsizliğini sağlayan en büyük  $k$  sayısı kaçtır?

**Çözüm:** Özel durum  $a = b$  ve  $c = 2a$  olsun. O zaman  $2ka^3 \leq a^3 + a^3 + 8a^3 = 10a^3$  olur ki  $k \leq 5$  dir.  $5abc \leq a^3 + b^3 + c^3$  olduğunu gösterelim.

$$a + b \leq c \Rightarrow c = a + b + x$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + (a + b + x)^3 - 5ab(a + b + x)$$

$$= a^3 + b^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)^2 x + 3(a + b)x^2 + x^3 - 5a^2 b - 5ab^2 - 5abx$$

$$= a^3 + b^3 + a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2 x + 6abx + 3b^2 x + 3ax^2 + 3bx^2 + x^3 - 5a^2 b - 5ab^2 - 5abx$$

$$= 2a^3 + 2b^3 - 2a^2 b - 2b^2 a + abx + 3x(a^2 + b^2) + 3x^2(a + b) + x^3$$

Ayrıca,

$$2a^3 + 2b^3 - 2a^2 b - 2b^2 a = 2(a^3 + b^3 - a^2 b - b^2 a)$$

$$= 2[(a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b)]$$

$$= 2(a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

olduğundan  $5abc \leq a^3 + b^3 + c^3$  elde edilir.

**YANIT: 5**

12) OBEB  $\left( \binom{1680}{1}, \binom{1680}{3}, \binom{1680}{5}, \dots, \binom{1680}{1679} \right)$  ifadesinin değeri kaçtır?

**Çözüm:** OBEB  $\left( \binom{1680}{1}, \binom{1680}{3}, \binom{1680}{5}, \dots, \binom{1680}{1679} \right) = d$  olsun.

$(1 + 1)^{1680}$  ifadesinin binom açılımından  $(1 - 1)^{1680}$  ifadesinin binom açılımını çıkarırsak,

$$\binom{1680}{1} + \binom{1680}{3} + \binom{1680}{5} + \dots + \binom{1680}{1679} = 2^{1679} \text{ elde ederiz.}$$

OBEB özelliklerinden  $d$  sayısının bu toplamı bölmesi gereklidir.

O halde,  $d$  sayısı bir  $k \in \mathbb{Z}$  için  $2^k$  şeklinde olmalıdır.  $d \mid \binom{1680}{1}$

ve  $\binom{1680}{1} = 1680 = 2^4 \cdot 105$  olduğu için  $d$  en fazla  $2^4$  olabilir.

Diğer taraftan  $n$  bir tek sayı iken,  $\binom{1680}{n} = \frac{1680}{n} \binom{1679}{n-1}$  eşitliğine göre

$\binom{1680}{n}$  sayısı  $2^4$  ile bölünecektir. Yani, her  $n$  tek sayısı için  $\binom{1680}{n}$  sayısı  $2^4$ 'ün katıdır. O halde,  $d = 2^4$  olur.

**YANIT:  $2^4$**

13)  $n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7$  ifadesi hangi  $n$  tam sayıları için bir asal sayı olur?

**Çözüm:** Verilen ifadeyi çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7 &= (n + 1)^4 - 3(n + 1)^2 + 9 \\ &= ((n + 1)^2 + 3)^2 - 9(n + 1)^2 \\ &= (n^2 + 2n + 4)^2 - 9(n + 1)^2 \\ &= (n^2 + 2n + 4 - 3n - 3)(n^2 + 2n + 4 + 3n + 3) \\ &= (n^2 - n + 1)(n^2 + 5n + 7) \end{aligned}$$

çarpımının bir asal sayı olmasını istiyoruz.  $n^2 - n + 1$  ve  $n^2 + 5n + 7$  sayıları pozitif olduğundan, iki durum söz konusudur:

i)  $n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$  veya  $n = 1$  olabilir.

$p = (n^2 - n + 1)(n^2 + 5n + 7)$  olsun  $n = 0$  için  $p = 7$ ,

$n = 1$  için  $p = 13$  asal sayı olur.

ii)  $n^2 + 5n + 7 = 1 \Rightarrow n = -2$  veya  $n = -3$  olabilir.

$n = -3$  için  $p = 13$

$n = -2$  için  $p = 7$  asal sayılar olur.

Dolayısıyla,  $n$  in alabileceği değerler  $\{-3, -2, 1, 0\}$  olur.

**Yanıt:**  $\{-3, -2, 1, 0\}$

14)  $\sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} k^2$  toplamı kaçtır?

**Çözüm:** 21 elemanlı bir küme  $A$  olsun.

$\{(X, a, b) : X \subseteq A, a \in X, b \in X\} = B$  kümesini sayalım.

$$|B| = \sum_{k=1}^{21} |\{(X, a, b) : X \subseteq A, a \in X, b \in X, |X| = k\}|$$
$$= \sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} k^2.$$

$X_a$  ile  $a$  elemanını içeren kümeleri,  $X_{a,b}$  ile de  $a, b$  elemanlarını içeren kümeleri gösterelim.  $|X_a| = 2^{20}$ ,  $|X_{a,b}| = 2^{19}$  olduğunu göz önüne alarak,

$$|B| = |\{(X, a, a) : a \in A, X \in X_a\}| + |\{(X, a, b) : a \neq b, a \in A, b \in A, X \in X_{a,b}\}|$$
$$= 2^{20} \cdot 21 + 21 \cdot 20 \cdot 2^{19} = 21 \cdot 2^{19} (2 + 20) = 11 \cdot 21 \cdot 2^{20} \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla,  $\sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} k^2 = 11 \cdot 21 \cdot 2^{20} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^{20}$  olarak bulunur.

**Yanıt:**  $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^{20}$

15)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesi, her birinde üç sayı bulunan üç gruba parçalanarak, her gruptaki sayıların çarpımları hesaplanıyor. Bu çarpımların en büyüğü  $P$  olarak adlandırılırsa,  $P$  nin mümkün olan en küçük değeri kaçtır?

**Çözüm:**  $\{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\{b_1, b_2, b_3\}$  ve  $\{c_1, c_2, c_3\}$  verilen  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin herhangi bir parçalanışı olsun.

$A = a_1 a_2 a_3$ ,  $B = b_1 b_2 b_3$  ve  $C = c_1 c_2 c_3$  diyelim.

Bu takdirde,

$$P^3 \geq ABC = a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 = 72 \cdot 72 \cdot 70 > 70^3$$

ve dolayısıyla  $P > 70$  olur.  $P$  sayısı  $A, B, C$  sayılarından en büyüğüdür.

Öte yandan  $P > 70$  olduğundan  $P$  sayısı için, 71 asal sayı olduğundan,

$P \geq 72$  olacağını söyleyebiliriz.

Böylece  $P = 72$  olacak biçimde  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin bir parçalanışını gösterirsek problem çözülmüş olur.  $\{1, 8, 9\}$ ,  $\{3, 4, 6\}$ ,  $\{2, 5, 7\}$  parçalanışı istenilenleri sağlar.

**Yanıt:** 72

16)  $x^{2010} - 1$  polinomunun  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$  polinomu ile bölümünden kalanı bulunuz.

**Çözüm:**

$$p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

ve

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^{2010} - 1 = (x^3)^{670} - 1 = (x^3 - 1)((x^3)^{669} + (x^3)^{668} + \dots + x^3 + 1) \\ &= p(x)q(x) + r(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $\deg(r(x)) < \deg(p(x)) = 4$  tür.

$a(x) = x^2 + x + 1$  için,  $a(x)|Q(x)$  ve  $a(x)|p(x)$  olduğundan  $a(x)|r(x)$  olması gerekir.

Buna göre,  $r(x) = (ax + b)(x^2 + x + 1)$ ;  $a, b \in \mathbb{Q}$  şeklindedir.

$(i)^{2010} - 1 = i^2 - 1 = -2 = p(i)q(i) + r(i) = i(ai + b)$ , olduğundan

$-2 = -a + ib$  ve dolayısı ile  $a = 2, b = 0$  yani  $r(x) = 2x(x^2 + x + 1)$  olarak bulunur.

**YANIT:**  $2x(x^2 + x + 1)$

17) 10 elemanlı bir kümeden, boş olmayan iki ayrık küme kaç farklı şekilde seçilebilir?

**Çözüm:**  $X$ , 10 elemanlı bir küme olmak üzere,

$\mathcal{A} = \{(A, B) : A \subseteq X, B \subseteq X, A \cap B = \emptyset\}$  kümesindeki her  $(A, B)$  elemanına

$$f : X \rightarrow \{0, 1, 2\}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \\ 2, & x \notin A \cup B \end{cases}$$

kuralıyla tarif edilen fonksiyonu karşılık getirirsek,  $\mathcal{A}$  kümesinin eleman sayısının

$X$  den  $\{0, 1, 2\}$  kümesine giden fonksiyonların sayısına yani  $3^{10}$  a eşit olduğunu

görürüz. Bu fonksiyonlardan "0" değerini almayanların;

yani,  $A = \emptyset$  durumuna karşılık gelenlerin sayısı  $2^{10}$ ,

benzer şekilde "1" değerini almayanların sayısı yani  $B = \emptyset$  durumuna karşılık

gelenlerin sayısı da  $2^{10}$  dur.

Buna göre,  $3^{10} - 2^{10} - 2^{10} + 1 = |\{(A, B) \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset \neq B\}|$

ve buradan istenen sayı  $\frac{3^{10}+1}{2} - 2^{10}$  olarak bulunur.

**YANIT:**  $\frac{3^{10}+1}{2} - 2^{10}$

18)  $S = \arctan \frac{1}{1+1^2} + \arctan \frac{1}{1+2^2} + \arctan \frac{1}{1+3^2} + \dots + \arctan \frac{1}{1+n^2}$  sayısı kaçtır?

**Çözüm:**  $\tan a = k + 1$  ve  $\tan b = k$  diyelim.  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$  formülünden

$$\arctan \frac{1}{1 + k + k^2} = \arctan \frac{(k + 1) - k}{1 + k(k + 1)} = \arctan(k + 1) - \arctan k$$

yazılabilir. Buradan,

$$S = \arctan(n + 1) - \arctan 1 = \arctan(n + 1) - \frac{\pi}{4}.$$

**YANIT:**  $\arctan(n + 1) - \frac{\pi}{4}$

**19)**  $\cos \frac{\pi}{11} - \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11}$  ifadesinin değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**  $f(x) = x^{11} - 1$  polinomunun kökleri,  $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{11}} = \cos \frac{2k\pi}{11} + i \sin \frac{2k\pi}{11}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ ) dir.  $f(x)$  içinde  $x^{10}$  un katsayısı sıfır olduğundan  $\sum_{k=0}^{10} x_k = 0$  dir. O halde bu toplamın reel kısmı da sıfır olur. Yani,

$$1 + \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \dots + \cos \frac{16\pi}{11} + \cos \frac{18\pi}{11} + \cos \frac{20\pi}{11} = 0$$

olur.  $\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$  eşitliğinden,

$$1 + \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \dots + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{2\pi}{11} = 0$$

ve

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{11} + 2 \cos \frac{4\pi}{11} + 2 \cos \frac{6\pi}{11} + 2 \cos \frac{8\pi}{11} + 2 \cos \frac{10\pi}{11} = 0$$

elde edilir.  $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$  eşitliğinden de,

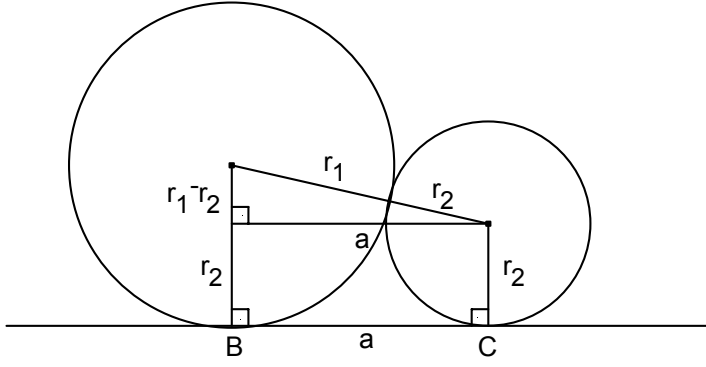
$$\cos \frac{\pi}{11} - \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

olur.

**YANIT:**  $\frac{1}{2}$

**20)** Bir  $P$  düzlemindeki  $\triangle ABC$  üçgeninin kenar uzunlukları  $a, b, c$  olsun. Bu düzleme  $A, B, C$  noktalarında ve aynı zamanda kendi aralarında da teğet olan 3 kürenin yarıçaplarını bulunuz.

**Çözüm:**



Şekilde, kürelerden  $B$  ve  $C$  noktalarında teğet olan ikisi gösterilmiştir.

Kürelerin yarıçapları  $r_1, r_2, r_3$  olsun.

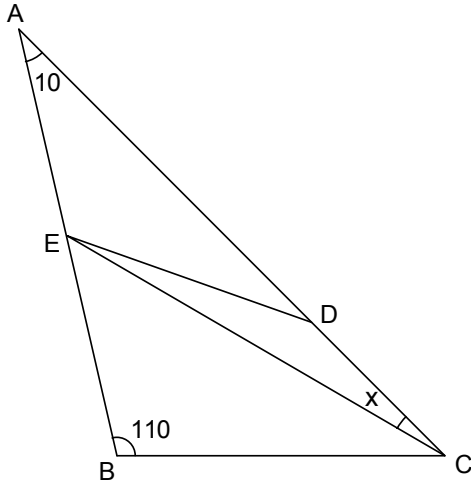
Şekilde görüldüğü gibi  $(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + a^2$  yazılabilir.

Benzer şekilde,  $(r_2 + r_3)^2 = (r_2 - r_3)^2 + c^2$  ve  $(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + b^2$  den düzenlemeler yapılarak

$r_1 = \frac{ab}{2c}$ ,  $r_2 = \frac{ac}{2b}$  ve  $r_3 = \frac{bc}{2a}$  bulunur.

**YANIT:**  $r_1 = \frac{ab}{2c}$ ,  $r_2 = \frac{ac}{2b}$  ve  $r_3 = \frac{bc}{2a}$

21)



$$|DE| = |BC|$$

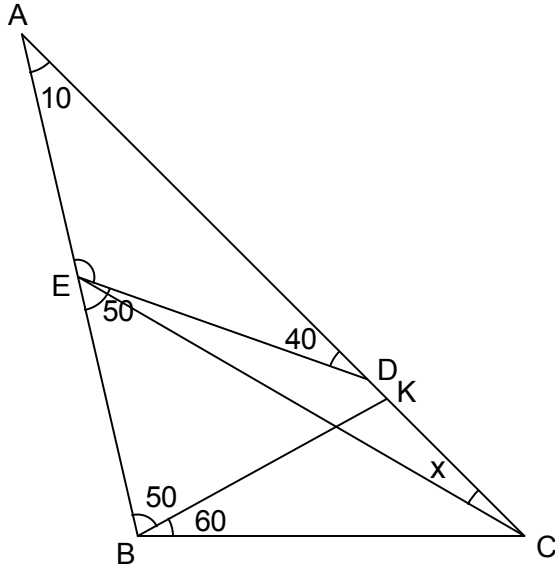
$$m(\overset{\Delta}{BAC}) = 10^\circ$$

$$m(\overset{\Delta}{ABC}) = 110^\circ$$

$$m(\overset{\Delta}{DEB}) = 50^\circ$$

$$\text{ise } x = ?$$

**Çözüm:**



$\triangle BKC$  eşkenar üçgenini oluşturalım.

$|BC| = |BK| = |DE|$  olur.

$m(\widehat{KBA}) = 50^\circ$  olur.

Soruda  $m(\widehat{DEB}) = 50^\circ$  verildiğinden,

$|BK| = |DE|$  olduğundan ve  $AB$  ile  $AC$  paralel olmadığından,

$K$  noktası  $D$  ile aynı noktadır.

$\triangle EDC$  ikizkenar üçgen çıkar.

$m(\widehat{ADE}) = 40^\circ$  olduğundan,

$x = 20^\circ$  bulunur.

**YANIT:**  $20^\circ$

22) Hangi pozitif  $n$  tam sayıları için  $x^{2n} + x^n + 1$  polinomu  $x^2 + x + 1$  polinomuna kalansız bölünür?

**Çözüm:**  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$  olduğundan,  $x^3 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$  dir.

$r \in \{0, 1, 2\}$  olmak üzere  $n = 3q + r$  ise

$x^{2n} + x^n + 1 \equiv x^{3 \cdot 2q} x^{2r} + x^{3q} x^r + 1 \equiv x^{2r} + x^r + 1 \pmod{x^2 + x + 1}$  olduğundan

kalansız bölümün gerçekleşmesi için  $r \neq 0$  olmasının gerek ve yeter olduğu görülür.

**YANIT:**  $n = 3q + 1$  ve  $n = 3q + 2$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$

23)

$$2 \sin 2^\circ, 4 \sin 4^\circ, 6 \sin 6^\circ, \dots, 180 \sin 180^\circ$$

sayılarının ortalamasını bulunuz.

**Çözüm:** İlk olarak,  $S = 2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + 6 \sin 6^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ$  toplamını bulalım. Bu ifadeyi  $\sin 1^\circ$  ile çarpalım.

$$S \cdot \sin 1^\circ = 2 \sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2(2 \sin 4^\circ \sin 1^\circ) + \dots + 89(2 \sin 178^\circ \sin 1^\circ)$$

Ters dönüşüm formüllerine göre,

$$2 \sin 2k^\circ \sin 1^\circ = \cos(2k - 1)^\circ - \cos(2k + 1)^\circ$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
S \cdot \sin 1^\circ &= 2 \sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2(2 \sin 4^\circ \sin 1^\circ) + \dots + 89(2 \sin 178^\circ \sin 1^\circ) \\
&= (\cos 1^\circ - \cos 3^\circ) + 2(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) + \dots + 89(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ) \\
&= \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 177^\circ - 89 \cos 179^\circ \\
&= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \dots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) - 89 \cos 179^\circ \\
&= \cos 1^\circ + 89 \cos 1^\circ = 90 \cos 1^\circ
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$S = 90 \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ} = 90 \cot 1^\circ$$

ve dizinin ortalaması

$$\frac{S}{90} = \cot 1^\circ$$

bulunur.

**YANIT:**  $\cot 1^\circ$

24)  $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$  olmak üzere,

$$S = 2[f(0) + f(\frac{1}{2009}) + f(\frac{2}{2009}) + \dots + f(\frac{2008}{2009}) + f(1)]$$

toplamını hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
f(x) + f(1-x) &= \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \frac{9^x(9^{1-x}+3) + 9^{1-x}(9^x+3)}{(9^x+3)(9^{1-x}+3)} \\
&= \frac{9^x 9^{1-x} + 3 \cdot 9^x + 9^{1-x} 9^x + 3 \cdot 9^{1-x}}{9^{1-x} 9^x + 3 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^{1-x} + 9} = 1
\end{aligned}$$

olduğundan,

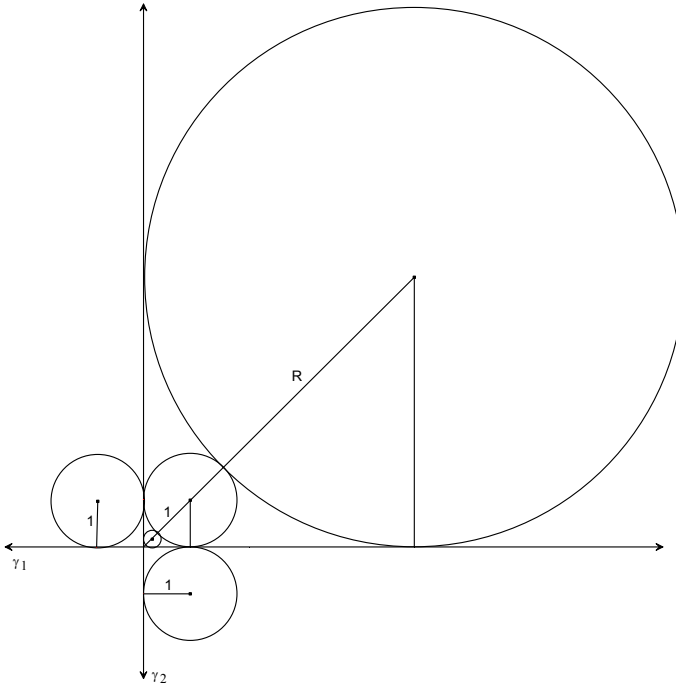
$$\begin{aligned}
S &= 2[f(0) + f(\frac{1}{2009}) + f(\frac{2}{2009}) + \dots + f(\frac{2008}{2009}) + f(1)] \\
&= [f(0) + f(1-0)] + [f(\frac{1}{2009}) + f(1 - \frac{1}{2009})] + \dots + [f(1) + f(0)] \\
&= 1 + 1 + \dots + 1 = 2010
\end{aligned}$$

elde edilir.

**YANIT:** 2010

25) Yarıçapı 1 olan bir çember, birbirine dik iki doğruya teğet olsun. Bu iki doğruya ve ilk çembere teğet olan çemberlerin yarıçaplarının toplamı kaçtır?

**Çözüm:**



En büyük çemberin yarıçapı  $R$  olsun.

$$R\sqrt{2} - R = \sqrt{2} + 1 \text{ den,}$$

$$R = \frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2} \text{ olur.}$$

En küçük çemberin yarıçapı da  $r$  olsun.

$$r\sqrt{2} + r = \sqrt{2} - 1 \text{ den,}$$

$$r = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ olur.}$$

Verilen çembere  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  doğrularına göre simetrik, 1 yarıçaplı iki çember de eklenirse, istenen toplam;

$$3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 2 = 8$$

olarak bulunur.

**YANIT:** 8

**26)**  $a < b < c < d$  olmak üzere, bu sayıların ikişerli toplamalarının en küçük değerleri 1, 2, 3 ve 4 ise  $d$  nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

**Çözüm:** Bütün yazılabilecek toplamalar,  $a + b, a + c, a + d, b + c, b + d, c + d$  dir.

$a < b < c < d$  ise  $a + b = 1$  ve  $a + c = 2$  dir.

En büyük toplamalar ise,  $b + d$  ve  $c + d$  olur.

Kalan toplamlardan  $b + c$  ve  $a + d$  den biri 3 diğeri 4 olur.

$$b + c = 3 \Rightarrow a + b = 1, a + c = 2, b + c = 3, a + d = 4$$

olduğundan  $a = 0, b = 1, c = 2, d = 4$  tür.

İkinci durumda yani  $b + c = 4$  durumunda

$$a + b = 1, a + c = 2, a + d = 3, b + c = 4$$

sisteminden  $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{2}, d = \frac{7}{2}$  elde edilir.

$d$  nin alabileceği değerler toplamı:  $4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$  bulunur.

**YANIT:**  $\frac{15}{2}$

**27)**  $a, b, c > 0$  ve  $a^4 + b^4 = c^4$  olsun.  $k$  tam sayı olmak üzere,  $a^k, b^k, c^k$  sayılarının bir geniş açılı üçgenin kenar uzunluklarını oluşturması için  $k$  değeri kaç olmalıdır?

**Çözüm:**  $a^4 + b^4 = c^4$  den  $a < c$  ve  $b < c$  bulunur.  $a^k, b^k, c^k$  nin bir geniş açılı üçgenin kenar uzunluklarını oluşturması için aşağıdaki 2 koşul sağlanmalıdır:

(i)  $a^k + b^k > c^k$

(ii)  $(a^k)^2 + (b^k)^2 < (c^k)^2 \Leftrightarrow a^{2k} + b^{2k} < c^{2k}$

$k > 4$  için  $c^k > a^k + b^k$  ve  $k < 4$  için  $c^k < a^k + b^k$  eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$k > 4$  olsun. O zaman,  $k - 4 > 0$  ve

$$\begin{aligned} c^k &= c^{k-4}c^4 = c^{k-4}(a^4 + b^4) \\ &= c^{k-4}a^4 + c^{k-4}b^4 > a^{k-4}a^4 + b^{k-4}b^4 = a^k + b^k \end{aligned}$$

olur.

$k < 4$  alırsak

$$c^k = c^{k-4}c^4 = \frac{c^4}{c^{4-k}} = \frac{1}{c^{4-k}}(a^4 + b^4) < \frac{a^4}{a^{4-k}} + \frac{b^4}{b^{4-k}} = a^k + b^k$$

elde edilir. Yani,  $c^k < a^k + b^k$  bulunur.

Dolayısıyla,  $c^k < a^k + b^k$  den  $k < 4$ , ve  $c^{2k} > a^{2k} + b^{2k}$  eşitsizliğinden  $2k > 4$  ve  $k > 2$  elde edilir. Buradan  $k = 3$  çıkar.

**YANIT: 3**

**28)**  $x^2 - 10[x] + 9 = 0$  denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.  
(Burada  $[x]$ ,  $x$  sayısının tam kısmıdır)

**Çözüm:**  $x$  verilen denklemin bir kökü olsun.  $n = [x]$  diyelim.

$x^2 + 9 = 10n$  eşitliğinden  $n \geq 1$  olduğu açıktır.  $n \leq x < n + 1$  olduğundan

$$n^2 + 9 \leq x^2 + 9 < (n + 1)^2 + 9 = n^2 + 2n + 10$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliklerde  $x^2 + 9 = 10n$  olduğunu göz önünde bulundurursak

$$n^2 + 9 \leq 10n < n^2 + 2n + 10 \quad (*)$$

elde ederiz.

$n^2 + 9 \leq 10n$  veya  $n^2 - 10n + 9 \leq 0$  eşitsizliğinin çözümleri  $[1, 9]$  aralığındaki tam sayılardır.  $10n < n^2 + 2n + 10$  veya  $n^2 - 8n + 10 > 0$  eşitsizliğini sağlayan tam sayılar ise,  $n < 4 - \sqrt{6}$  ve  $n > 4 + \sqrt{6}$  eşitsizliklerini sağlar.

Buradan,  $n \leq 1$  ve  $n \geq 7$  elde edilir.

Böylece (\*) eşitsizliğini sağlayan  $n$  sayıları şunlardır: 1, 7, 8, 9.

Şimdi  $n$ ' nin bu değerlerini  $x^2 + 9 = 10n$  denkleminde yerine yazarsak

$x^2$  nin alabileceği değerler 1, 61, 71, 81 ve buradan  $x$  in alabileceği değerler,

$\pm 1, \pm \sqrt{61}, \pm \sqrt{71}, \pm 9$  olur.  $x \geq 1$  olduğundan verilen denklemin çözüm kümesi 1,  $\sqrt{61}$ ,  $\sqrt{71}$ , 9 dir.

**YANIT: 1,  $\sqrt{61}$ ,  $\sqrt{71}$ , 9**

**29)** Her  $x \in \mathbb{R}$  için  $2(x - 2)^{40} - (ax + b)^{40} = (x^2 + px + q)^{20}$  eşitliğini sağlayan  $a, b, p, q$  reel sayılarını bulunuz.

**Çözüm:** Verilen eşitlikte  $x = 2$  yazalım.  $(2a + b)^{40} + (4 + 2p + q)^{20} = 0$  olur.

Buradan  $b = -2a$  elde edilir.  $b$  nin bu değerini verilen eşitlikte yerine yazarsak

$$2(x - 2)^{40} = (ax - 2a)^{40} + (x^2 + px + q)^{20}$$

olur. Eşitliğin her iki yanında bulunan  $x^{40}$  in katsayılarının eşitliğinden

$$2 = a^{40} + 1 \Rightarrow a^{40} = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\Rightarrow b = -2a = \mp 2$$

olur.  $a$  nın bu değerlerini verilen eşitlikte yerine yazarsak

$$2(x-2)^{40} = (x-2)^{40} + (x^2 + px + q)^{20}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 + px + q \text{ veya } x^2 - 4x + 4 = -(x^2 + px + q)$$

$$\Rightarrow p = -4 \text{ ve } q = 4$$

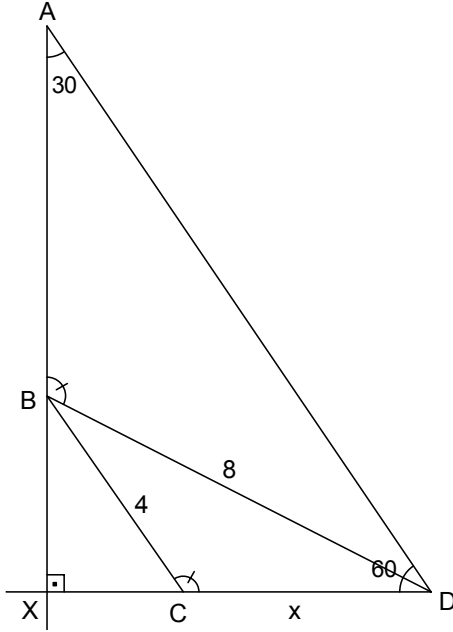
bulunur.

O halde,  $a = 1, b = -2, p = -4, q = 4$  ve  $a = -1, b = 2, p = -4, q = 4$  olur.

**YANIT:**  $a = 1, b = -2, p = -4, q = 4$  ve  $a = -1, b = 2, p = -4, q = 4$ .

30)  $ABCD$  bir dörtgen olmak üzere,  $|BD| = 8, |BC| = 4, m(\hat{A}) = 30^\circ, m(\hat{CDA}) = 60^\circ$  ve  $m(\hat{ABD}) = m(\hat{BCD})$  olsun.  $|CD|$  kaçtır?

**Çözüm:**



$AB$  ve  $DC$  yi uzatıp  $X$  noktasında kesiştirelim.  $m(\hat{X}) = 90$  olduğu açıkça görülebilir.

$\triangle XBD \sim \triangle XCB$  dir. Buradan  $\frac{XB}{XC} = \frac{8}{4} = 2$  bulunur. Öyleyse  $\triangle CXB$  dik üçgeninde

Pisagor teoremi uygulanırsa,  $|XC| = \frac{4}{\sqrt{5}}$  ve  $|XB| = \frac{8}{\sqrt{5}}$  olur.

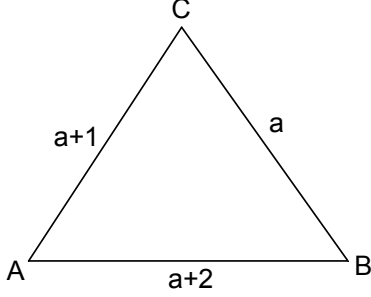
$\triangle XBD$  üçgenine de Pisagor teoremi uygulanırsa,  $|XD| = \frac{16}{\sqrt{5}}$ , buradan da

$$|CD| = |XD| - |XC| = \frac{16}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ olarak bulunur.}$$

**YANIT:**  $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

**YEDEK 1)** Kenar uzunlukları ardışık tam sayılar olan ve açılardan birisinin ölçüsü diğerinin 2 katı olan tüm üçgenleri bulunuz.

**Çözüm:**



Kosinüs teoreminden  $\cos A = \frac{a+5}{2(a+2)}$ ,  $\cos B = \frac{a+1}{2a}$ ,  $\cos C = \frac{a-3}{2a}$  elde edilir.

$C = 2A$  olsun.

$\cos C = 2 \cos^2 A - 1$  denklemini çözersek,  $a = 4$  bulunur.

$B = 2A$  olsun.

$\cos B = 2 \cos^2 A - 1$  den,  $a = 1$  çıkar. Fakat 1, 2, 3 üçgeni olamaz.

$C = 2B$  olsun.

$\cos C = 2 \cos^2 B - 1$  den,  $a$  nın tamsayı değeri yoktur.

Öyleyse  $a$  sadece 4 olabilir.

**YANIT:** 4, 5, 6 üçgeni

**YEDEK 2)**  $a, b, c, d$  pozitif tam sayılar olmak üzere,  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3}{4}$  ve

$\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} = 15$  olsun. Buna göre  $ac + bd - ad - bc$  ifadesinin değeri kaçtır?

**Çözüm:**  $a = \frac{3}{4}c$  ve  $b = \frac{3}{4}d$  olduğundan,  $a - b = \frac{3}{4}c - \frac{3}{4}d = \frac{3}{4}(c - d)$  olur.

$a$  ve  $b$ ,  $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} = 15$  ifadesinde yerine konursa,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} &= \sqrt{\frac{9c^2}{16} + c^2} - \sqrt{\frac{9d^2}{16} + d^2} \\ &= \sqrt{\frac{25c^2}{16}} - \sqrt{\frac{25d^2}{16}} \\ &= \frac{5}{4}(c - d) = 15\end{aligned}$$

$\Rightarrow c - d = 12$  olur. Dolayısıyla  $a - b = \frac{3}{4}(c - d) = 9$  dur.

$$\begin{aligned}ac + bd - ad - bc &= a(c - d) - b(c - d) = (a - b)(c - d) \\ &= 9 \cdot 12 = 108\end{aligned}$$

olarak bulunur.

**YANIT:** 108

**YEDEK 3)**  $a = 0,001$  ve  $x_1 = \sin a$ ,  $x_2 = e^a - 1$ ,  $x_3 = a$ ,  $x_4 = \frac{\sin a}{\cos a + 1}$  olmak üzere, monoton  $f(x)$  fonksiyonu için  $f(x_1) = \ln 3$ ,  $f(x_2) = 2,01$  olsun.  $f(x_3)$  ve  $f(x_4)$  değerleri,  $\{1, \ln 4, \frac{5}{2}, 3\}$  kümesinin hangi elemanlarıdır?

**Çözüm:**  $a = 0,001$  olduğundan

$$\frac{\sin a}{\cos a + 1} < \sin a < a < e^a - 1$$

dir. Yani

$$x_4 < x_1 < x_3 < x_2$$

olur. O zaman  $f(x_1) = \ln 3 < 2,01 = f(x_2)$  eşitsizliğinden ve  $f$  in monoton oluşundan

$$f(x_4) < f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

ve dolayısı ile

$$f(x_4) < \ln 3 < f(x_3) < 2,01$$

ve buradan da  $f(x_3) = \ln 4$  ve  $f(x_4) = 1$  bulunur.

**YANIT:** Sırasıyla  $\ln 4$  ve  $1$ .