DOĞUŞ ÜNİVERSİTESİ
8. İSTANBUL MATEMATİK YARIŞMASI
FEN LİSELERİ KATEGORİSİ TAKIM YARIŞMASI

1-60) m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere
$$n^4+4m^4$$
şeklindeki sayıların kaç tanesi asal sayıdır?

Çözüm:
$$\begin{aligned} n^4+4m^4 &= (n^2+2m^2)^2-4n^2m^2 \\ &= (n^2-2nm+2m^2)(n^2+2nm+2m^2) \\ &= \left[(n-m)^2+m^2\right]\left[(n+m)^2+m^2\right] \end{aligned}$$
sayısı asal ise, $(n+m)^2+m^2>1$ olduğundan,
$(n-m)^2+m^2=1$ yani $n=m=1$ olmalıdır. Buradan, $n^4+4m^4=5$ bir asal sayı olur.

YANIT: 1

2-60) Bir kişinin 1957 yılında yaşı, doğum yılının basamaklarının sayı değerleri toplamı kadardır. Bu kişi, 1957' de kaç yaşındadır?

Çözüm: Kişinin doğum tarihi $1abc$ olsun. O zaman,
$1000+100a+10b+c+(1+a+b+c)=1957$
$101a+11b+2c=956.$ Buradan, $a=9$ veya $a=8$ elde edilir.
$a=8$ ise $11b+2c=148$ olamaz. Bu nedenle, $a=9$ olmalıdır. O zaman, $11b+2c=47;\ b=3, c=7$ bulunur. Dolayısıyla, doğum tarihi 1937' dir. 1957 yılındaki yaşı ise, $1957-1937=20$ olur.

YANIT: 20

3-60) $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ sayıları negatif olmayan ve $x_1+x_2+\ldots+x_{13}=2$ eşitliğini sağlayan reel sayılar olmak üzere $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{12}x_{13}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{12}x_{13} \leq (x_1+x_3+\ldots+x_{13})(x_2+x_4+\ldots+x_{12})$ eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır. $a=x_1+x_3+\ldots+x_{13}$ ve
$b=x_2+x_4+\ldots+x_{12}$ diyelim. Bu durumda, Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_{13})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$
Böylece $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{12}x_{13} \leq 1$ elde edilir. $x_1=x_2=1$ ve $x_3=\ldots=x_{13}=0$ alırsak $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{12}x_{13}=1$ olur.

Yanıt: 1

4-60) $x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$ denkleminin köklerinin kareleri toplamının minimum olmasını sağlayan m sayısını bulunuz.

Çözüm: $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki ikinci dereceden denklemler için, x_1, x_2 denklemin kökleri olmak üzere,

$$y = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$$

sağlandığından

$$y = (2-m)^2 - 2(-m-3) = m^2 - 2m + 10$$

olur. $y'(m) = 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$ minimum değeri verir.

Yanıt: 1

5-60) $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$ denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm: x_0, y_0, z_0 denklemin herhangi bir çözümü olsun. $x_0^3 + 2y_0^3 + 4z_0^3 - 6x_0y_0z_0 = 0$ olduğundan x_0 bir çift sayıdır. $(x_0 = 2x_1)$

x_0 yerine $2x_1$ yazıp denklemi 2' ye bölersek $4x_1^3 + y_0^3 + 2z_0^3 - 6x_1y_0z_0 = 0$ bulunur. Buradan $y_0 = 2y_1$ olduğu görülür. y_0 yerine $2y_1$ yazılıp tekrar denklem 2'ye bölünürse,

$$2x_1^3 + 4y_1^3 + z_0^3 - 6x_1y_1z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2z_1$$

elde edilir.

Böylece, x_0, y_0, z_0 değerlerinin ortak bir böleni vardır. Denklem homojen olduğundan, $\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}$ de denklemin tamsayı çözümleri olacaktır. Bu işlem k kere tekrarlanırsa $\frac{x_0}{2^k}, \frac{y_0}{2^k}, \frac{z_0}{2^k}$ üçlüsü de bir çözüm olur. x_0, y_0, z_0 dan herhangi biri 0 dan farklı ise, öyle bir k sayısı vardır ki $\frac{x_0}{2^k}, \frac{y_0}{2^k}, \frac{z_0}{2^k}$ dan en az biri tam sayı olamaz. Bu çelişkiden $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ elde edilir.

YANIT: $x = y = z = 0$

6-60) Aşağıdaki denklem sistemini pozitif tam sayılar kümesinde çözünüz.

$$x^3 - y^3 - z^3 - xy - 4z = 0$$
$$x^2 - 2y - 2z = 0$$

Çözüm: x, y, z pozitif tam sayılarının sistemi sağladıklarını varsayalım. Bu taktirde 1. denklemden $y < x$ ve $z < x$ olacağı açıktır.

Buradan, $y \le x - 1$ ve $z \le x - 1$ yazılabilir. Bu eşitsizlikleri 2. denklemde göz önüne alırsak,

$$x^2 = 2(y+z) \le 2(x - 1 + x - 1) = 4x - 4$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 2$$

olur. $y \leq x - 1$ ve $z \leq x - 1$ eşitsizliklerinden ise $y = z = 1$ olduğu açıktır. $(2, 1, 1)$ üçlüsünün sistemin çözümü olduğunu görmek kolaydır. Sistemin pozitif tam sayılarda başka çözümü yoktur.

YANIT: $(2, 1, 1)$

7-60) Düzlemde, ikişer ikişer birleştirilerek tam 196 farklı doğru çizilebilecek şekilde 21 nokta verilmiştir. Bu doğrulardan herhangi biri üzerinde, verilen noktalardan en fazla 3 tane bulunsun. Buna göre, 3 tane nokta içeren doğruların sayısı kaçtır?

Çözüm: Aynı doğru üzerinde bulunan 3 nokta olmaması durumunda, tüm doğruların sayısı: $\binom{21}{2} = 210$ dur.

Herhangi bir doğru 3 nokta içeriyor ise, bu noktaların belirttiği doğru sayısı $\binom{3}{2} - 1 = 2$ azalmış olur.

Toplam eksilen doğru sayısının $210 - 196 = 14$ olması için, 3 noktayı içeren doğru sayısı 7 olmalıdır.

YANIT: 7

8-60) Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu $n > 21$ için $f(n) = n - 3$ ve $n \leq 21$ için $f(n) = f(n + 5)$ koşullarını sağlarsa $f(1)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$f(21) = f(26) = 26 - 3 = 23$$

tür.

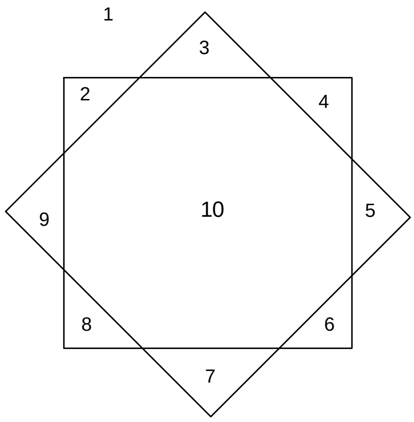
$$f(1) = f(1 + 5) = f(1 + 5.2) = f(1 + 5.3) = f(1 + 5.4) = f(21) = 23$$

bulunur.

YANIT: 23

9-60) İki dikdörtgen bir düzlemi en çok kaç parçaya bölebilir?

Çözüm:

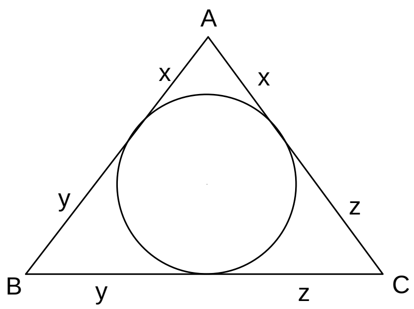


Dörtgenlerden herhangi bir tanesinin bir kenarı diğer dörtgenin iç bölgesini en çok iki parçaya böler. Bu durumda, her bir dörtgende bir tanesi ortak olmak üzere 5'er parça oluşur. Böylece 2 dörtgende ise toplam en çok 9 parça oluşur. Her iki dörtgenin dışında kalan parçayı da eklersek toplam 10 parça elde edilir.

Yanıt: 10

10-60) Kenar uzunlukları 603, 804 ve 1005 olan bir üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı kaçtır?

Çözüm:



Üçgenin kenar uzunlukları 201'in $3, 4$ ve 5 katı olduğundan, $a = 201$ olmak üzere, kenar uzunluklarını $3a, 4a$ ve $5a$ gibi düşünebiliriz.
Üçgen şekildeki gibi harflendirilirse,
$x + y = 3a$
$x + z = 4a$
$y + z = 5a$
Buradan da, $x = 201$, $y = 402$, $z = 603$ elde edilir. $m(A) = 90^\circ$ olduğundan, iç teğet çemberin yarıçapı 201 olarak bulunur.

Yanıt: 201

11-60) $2x^4 \leq \sin^6 x + \cos^8 x - 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\sin^4 x \leq 1,\ \cos^6 x \leq 1$ olduğu için,
$2x^4 \leq \sin^6 x + \cos^8 x - 1 = \sin^2 x \cdot \sin^4 x + \cos^2 x \cdot \cos^6 x - 1 \leq \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$ ve buradan da $x = 0$ elde edilir.

YANIT: 0

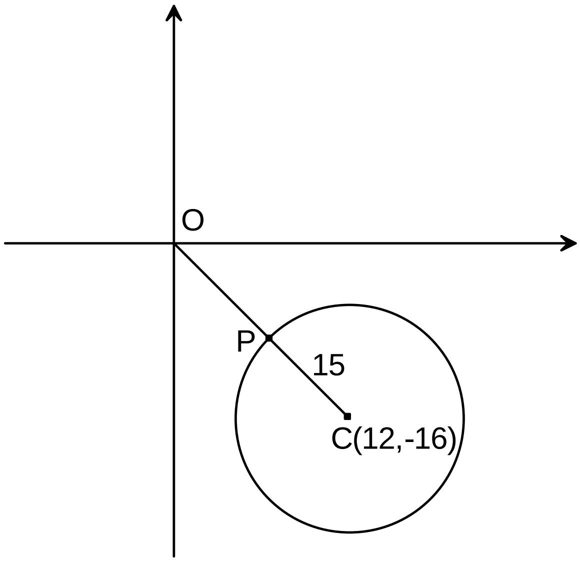
12-60) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ formülü ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $a_n \geq 0,\ a_{n+1} > a_n$ olduğu için $\{a_n\}$ dizisinin sonlu veya sonsuz bir limiti vardır. Limit sonlu olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ise indirgeme formülünde limit alırsak, $a = a + \frac{1}{a}$ çıkar. Bu denklemin sonlu çözümü olmadığından, limit sonsuz olmalıdır.

YANIT: ∞

13-60) Reel x ve y sayıları $(x-12)^2 + (y+16)^2 = 225$ denklemini sağladığına göre $x^2 + y^2$ nin alabileceği minimum değer kaçtır?

Çözüm:



$|OP|^2 = \min(x^2 + y^2)$
$|OC| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20,$
$|OP|^2 = (20 - 15)^2 = 5^2 = 25$
$\min(x^2 + y^2) = 25$ bulunur.

YANIT: 25

14-75) $(2m + n)(2n + m) = 2^{2009}$ eşitliğini sağlayan kaç tane (m, n) negatif olmayan tam sayı ikilisi vardır?

Çözüm: Verilen denklemden $2m + n = 2^s$ ve $2n + m = 2^r$ ve $s + r = 2009$ olacak şekilde negatif olmayan s ve r tam sayılarının bulunması gerektiği görülür. Buna göre $m = \frac{1}{3}(2^{s+1} - 2^r)$ ve $n = \frac{1}{3}(2^{r+1} - 2^s)$ olmalıdır. Diğer taraftan $2^{s+1} = 2^{2010-r} \equiv 2^{-r} \equiv 2^r (\bmod 3)$ ve aynı şekilde $2^{r+1} \equiv 2^s (\bmod 3)$ olduğu görülür. Dolayısı ile istenen sayı, $s + r = 2009$ denkleminin (s, r) negatif olmayan tam sayı çözümleri sayısına yani $\binom{2009+1}{1} = 2010$ a eşittir.

Yanıt: 2010

15-75) $x^3 = y^3 + y^2 + 1$ denkleminin bütün (x, y) tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $(y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ dir. Öte yandan verilen denklemi kullanarak

$$(y+1)^3 = y^3 + y^2 + 1 + 2y^2 + 3y = x^3 + 2y^2 + 3y$$

yazılabilir. Eğer, $2y^2 + 3y > 0$ ise $(y+1)^3 > x^3 > y^3$ bulunur. Bu eşitsizlikten 3. dereceden kök alırsak, $y + 1 > x > y$ çıkar. Yani y tam ise x tam değildir sonucu elde edilir. O zaman, $2y^2 + 3y \leq 0$ eşitsizliği sağlanmalıdır.

Buradan $y(2y + 3) \leq 0$ ve $\frac{-3}{2} \leq y \leq 0$ bulunur. Bu aralıktaki tam sayılar $y = -1$ ve

$y = 0$ dır.

$y = -1$ ise $x^3 = 1$ ve $x = 1$, $y = 0$ ise $x^3 = 1$ ve $x = 1$ elde edilir. Denklemin tam sayı çözümleri $(1,0)$ ve $(1,-1)$ olarak bulunur.

YANIT: $(1,0),(1,-1)$

16-75)

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{15})^3$$

polinomunda x^{15} nin önündeki katsayıyı bulunuz.

Çözüm: p,q,r sırasıyla 1. 2. ve 3. parantezlerdeki x lerin kuvvetlerini gösteren ve $0 \leq p,q,r \leq 15$ koşulunu sağlayan tam sayılar olmak üzere,

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{15})(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{15})(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{15})$$

ifadesinde, $x^{15} = x^p x^q x^r$ şeklindeki terimleri aramalıyız. Bunların sayısı $p + q + r = 15$ tir. p ve q bağımsız değişken olsun. $p = 0$ ise $q = 0,1,\ldots,15$ yani 16 farklı değer alabilir. $p = 1$ ise $q = 0,1,\ldots,14$ yani 15 farklı değer alabilir. Bu şekilde devam edersek; istenen sayısının 1'den 16'ya kadar olan sayıların toplamı olduğunu görürüz. Dolayısıyla x^{15} nin önündeki katsayı $\frac{16.17}{2} = 136$ olur.

YANIT: 136

17-75) $0 \leq x \leq 2015$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{2010} k = x \pmod{2016}$ ise, x kaçtır?

Çözüm: $y = \sum_{k=1}^{2015} k \pmod{2016}$ olsun. Birinci ve sonuncu terimin toplamı, ikinci ve sondan bir önceki terimin toplamı, ... 2016 olduğundan, bu toplamlar mod 2016 da 0 dır. Bu şekilde devam edersek, sadece ortadaki terim olan 1008 kalır. Öyleyse $y = 1008 \pmod{2016}$ dır. Eklediğimiz terimlerin toplamını hesaplarsak, $2015 + 2014 + \ldots + 2011 = (-1) + (-2) + \ldots + (-5) = -15 \pmod{2016}$ dır. Öyleyse

$$x = 1008 - (-15) = 1023 \pmod{2016}$$

bulunur.

YANIT: 1023

18-75)

$$11x - 13y = 1$$

$$x + y > 50$$

bağıntılarını sağlayan toplamı en küçük pozitif (x,y) tamsayı ikilisini bulunuz.

Çözüm: $x = 6$ ve $y = 5$ değerlerinin verilen denklemin bir çözümü olduğu kolayca görülür. Öyle ise, $(x,y) = (6+13t, 5+11t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

şeklinde yazılabilir. Denklemin tamsayı çözümleri, $x + y = 11 + 24t > 50$ eşitsizliğini sağlayacağından $t \geq 2$ olmalıdır.

$t = 2$ için toplamı en küçük olan ikili, $(x,y) = (32,27)$ olarak bulunur.

Yanıt: $(32,27)$

19-75) Bir torbada toplam 45 adet kırmızı, beyaz ve siyah renkte bilyeler vardır. Bu torbadan, rastgele 26 tane bilye alındığında, en az biri kırmızı, 31 tane bilye alındığında en az biri beyaz, 36 tane alındığında en az biri siyah olmaktadır. Buna göre, bu torbada kaçar adet kırmızı, beyaz ve siyah bilye bulunmaktadır?

Çözüm: Kırmızı bilyelerin sayısını x, beyaz bilyelerin sayısını y, siyah bilyelerin sayısını z ile gösterelim. Verilen bilgilere göre,

$y + z \leq 25$

$x + z \leq 30$

$x + y \leq 35$ eşitsizlikleri elde edilir. $x + y + z = 45$ olduğundan eşitsizlikler, eşitlik haline dönüştürülmelidir.

Öyleyse, elde edilen 3 denklemden; $z = 10,\ x = 20,\ y = 15$ bulunur.

YANIT: Kırmızı 20, beyaz 15, siyah 10.

20-90) Tüm basamakları tek sayı olan ve hiçbir ardışık iki basamağı toplamı 10 etmeyen 3 basamaklı kaç sayı vardır?

Çözüm: Tüm basamakları tek sayı olan 3 basamaklı sayıların hepsi 5^3 dür. Toplamları 10 eden çiftler: $(1,9)$, $(3,7)$ ve $(5,5)$ dir.

$(1,9)$ çifti yan yana olan 3 basamaklı sayılar, 19_, _19, 91_, _91 şeklinde olmak üzere toplam $5+5+5+5-2 = 18$ tane,

$(3,7)$ çifti yan yana olan 3 basamaklı sayılar, 37_, _37, 73_, _73 şeklinde olmak üzere toplam $5+5+5+5-2 = 18$ tane,

$(5,5)$ çifti yan yana olan 3 basamaklı sayılar, 55_, _55 olmak üzere toplam $5+5-1 = 9$ tane olduğundan,

$125 - (18+18+9) = 80$ bulunur.

YANIT: 80

21-90) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $x_1 = \frac{1}{2},\ x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ bağıntıları ile tarif edildiğine göre

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{2010}+1}$$

sayısının tam kısmı kaçtır?

Çözüm:

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
$$x_3 = \frac{9}{16} + \frac{3}{4} = \frac{21}{16} > 1$$

ve dolayısıyla, her $k \geq 3$ için $x_k > 1$ olur. $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ bağıntısından,

$$\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k(x_k+1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_k+1}$$
$$\frac{1}{x_k+1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$$

elde edilir. Bu formülü istenen ifadede kullanırsak, sadeleştirmeler sonucunda, $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2011}} = 2 - \lambda$ olur. $0 < \lambda < 1$ olduğundan toplamın tam kısmı 1 olarak bulunur.

YANIT: 1

22-90) Bir sınıfta toplam 20 öğrenci vardır. Rastgele seçilen herhangi iki öğrencinin ortak bir dedesi vardır, ancak öğrencilerin tümü, aynı dedenin torunu değildir. Bu öğrencilerin kaç dedesi vardır? En çok torunu olan dedenin en az kaç torunu vardır?

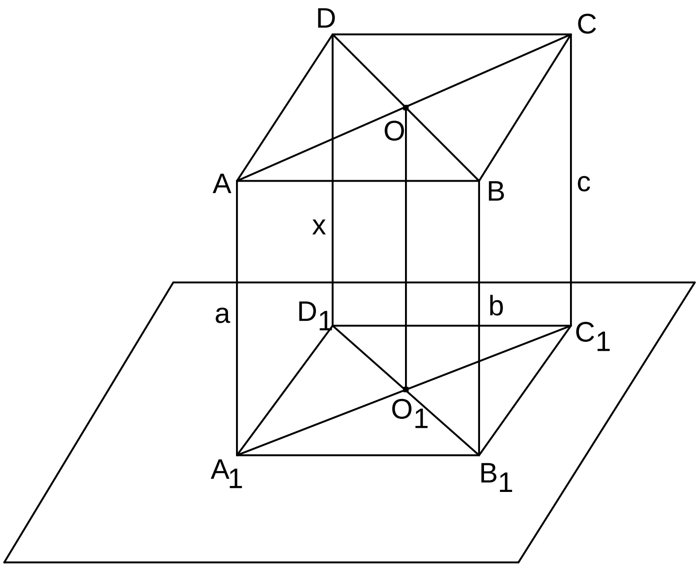
Çözüm: Dedeleri nokta, torunları ise iki dedeyi birleştiren eğriler gibi düşünelim. 1 öğrenci seçelim. Bu öğrencinin iki dedesini *A* ve *B* noktalarıyla gösterelim. *A* ve *B* dedelerinin ortak torunları *A* ile *B* yi birleştiren eğrilerdir. Bu eğrilerin sayısı 20 olamaz, çünkü hepsi aynı dedenin torunları değildir. Bu eğrilerin dışında olanların hepsinin *A* ile *B* yi birleştiren eğrilerle ortak dedesi olduğu için, bu öğrenciler *A* dan veya *B* den çıkan eğrilerle belirtilmelidir. Soruda verilen koşullara göre, hepsi *A* dan veya hepsi *B* den çıkamaz. *A* dan çıkanlar *B* den çıkanlarla aynı bir *C* noktasında kesişmiyorsa, *A* dan çıkanlarla *B* den çıkanların ortak bir dedesi olmaz. Böylece *A*, *B* ve *C* noktaları arasındaki toplam eğri sayısı 20 dir. Dolayısıyla dedelerin sayısı da 3 tür. *B* ile *C* arasındaki eğrilerin sayısının en az oldugunu kabul edersek, bu eğrilerin sayısı $\frac{20}{3}$ ten küçük olmalıdır. O zaman, *A* dan çıkan eğrilerin sayısı $\frac{2 \cdot 20}{3}$ ten büyük olmalıdır. Bu ise, en çok torunu olan *A* dedesinin en az 14 torunu olduğunu gösterir.

Yani, dede sayısı 3 tür ve en fazla torunu olan dede en az 14 toruna sahiptir.

YANIT: 3 dede, 14 torun.

23-90) Bir *P* düzleminin dışında kalan *ABCD* paralelkenarının *A*, *B* ve *C* köşelerinin *P* düzleminden uzaklığı *a*, *b* ve *c* ise *D* köşesinin *P* den uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm:



D nin P düzlemine uzaklığı x olsun. Paralelkenarın A, B, C, D köşelerinin ve köşegenlerinin kesişim noktası O nun, P düzlemi üzerindeki izdüşümlerini sırasıyla A_1, B_1, C_1, D_1 ve O_1 ile gösterelim. OO_1 doğru parçası AA_1C_1C ve BB_1D_1D yamuklarının orta tabanı olduğu için

$OO_1 = \frac{a+c}{2} = \frac{b+x}{2} \Rightarrow x = a + c - b$ bulunur.

Yanıt: $a + c - b$

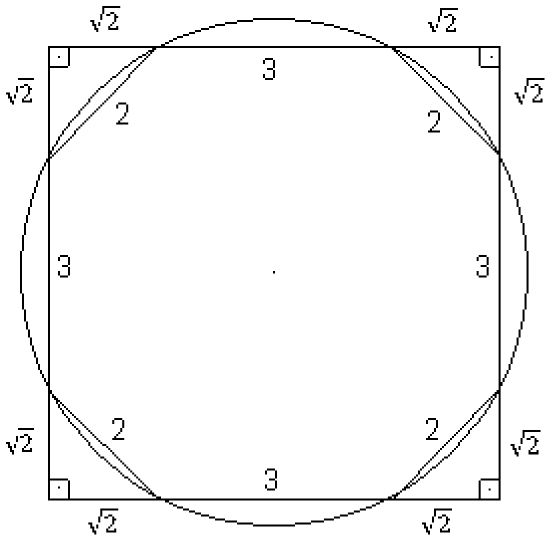
24-90) Bir çember üzerine, ard arda gelen her dört sayının toplamı 30 olacak şekilde 14 pozitif tam sayı yerleştirilsin. Buna göre, bu sayıların en büyüğü en çok kaç olabilir?

Çözüm: Bu sayılardan herhangi komşu iki tanesini ayırdığımızda geriye kalan 12 sayının toplamı 90 olacaktır. Öyle ise, herhangi iki komşunun toplamı sabittir ve dört ardışığın toplamı da 30 olduğundan, iki komşunun toplamı 15 olacaktır. Dolayısıyla, iki pozitif tamsayının toplamı 15 ise, en büyüğü en çok 14 olabilir.

YANIT: 14

25-90) Köşeleri bir çember üzerinde olan sekizgenin dört kenarının uzunlukları 3 ve kalan kenarlarının uzunlukları 2’ dir. Sekizgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



Sekizgenin kenarlarının dizilişine göre alan değişmeyeceğinden, diziliş, şekildeki gibi alınabilir.

Büyük karenin alanı:

$(3 + 2\sqrt{2}\,)^2 \;=\; 17 + 12\sqrt{2}$

Böylece sekizgenin alanı:

$17 + 12\sqrt{2} \;-\; \left(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}{2} \ast 4\right) \;=\; 13 + 12\sqrt{2}$

olarak bulunur.

Yanıt:$13 + 12\sqrt{2}$