DOĞUŞ ÜNİVERSİTESİ
8. İSTANBUL MATEMATİK YARIŞMASI
LİSELER KATEGORİSİ TAKIM YARIŞMASI

1-60) Dört çocuk, Ahmet, Ferit, Berk ve Mehmet koşu yarışı yapıyorlar. Yarışma sonucunda, Ahmet, "Ben birinci ve sonuncu olmadım.", Ferit, "Ben sonuncu olmadım.", Berk, "Ben birinci oldum." ve Mehmet, "Ben sonuncu oldum." diyor.
Çocuklardan üçü doğru, biri yalan söylediğine göre birinci ve sonuncu kimdir?

Çözüm: Ahmet yalan söylememiştir. Çünkü Ahmet'in yalan söylemesi durumunda Berk veya Mehmet'ten biri de yalan söylemiş olur. Benzer olarak, Ferit ve Mehmet de doğru söylemiştir. Yanlış söyleyen Berk' tir. O zaman Mehmet sonuncu, Ferit de birincidir.

YANIT: Sırasıyla *Ferit* ve *Mehmet*.

2-60) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(1) = 1$ koşulunu ve

$$f(x+5) \geq f(x) + 5$$
$$f(x+1) \leq f(x) + 1$$

eşitsizliklerini sağlayan bir fonksiyon ise $f(2010)$ değeri kaçtır?

Çözüm.

$$f(x) + 5 \leq f(x+5) \leq f(x+4) + 1 \leq f(x+3) + 2 \leq f(x+2) + 3 \leq f(x+1) + 4$$

olduğundan

$$f(x) + 1 \leq f(x+1)$$

ve $f(x+1) \leq f(x) + 1$ koşulundan dolayı,

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

elde edilir. O halde,

$$f(2) = 1 + 1 = 2, \ f(3) = 2 + 1 = 3, \ \ldots. \ , \ f(2010) = 2010$$

olarak bulunur.

YANIT: 2010

3-60) $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f(0) = 1$ ise $3f'(0) + 2$ kaçtır?

Çözüm: Verilen koşullardan 1 in f fonksiyonunun maksimum değeri ve dolayısı ile 0 noktasının, f fonksiyonunun maksimum noktası volduğu sonucu çıkar. f türevlenebilir bir fonksiyon ve 0 tanım bölgesinin bir iç noktası olduğu için $f'(0) = 0$ dır ve $3f'(0) + 2 = 2$ olur.

YANIT: 2

4-60) $(a+b)^n$ açılımında b nin çift kuvvetlerini içeren terimlerin toplamı x ve tek kuvvetlerini içeren terimlerin toplamı y olsun. $x^2 - y^2$ kaçtır?

Çözüm. $x+y = (a+b)^n,\ x-y = (a-b)^n$ olduğu için
$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = (a^2-b^2)^n$ olarak bulunur.

YANIT: $(a^2-b^2)^n$

5-60)

$$x - y = 2$$
$$xy + z^2 + 1 = 0$$

denklem sisteminin gerçel sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. x ve $-y$ sayıları $k^2 - 2k + (1+z^2) = 0$ denkleminin kökleridir. Diskriminant $\Delta = 1 - (1+z^2) = -z^2 \geq 0$ olması için $z = 0$ olması gerekir. O zaman,
$(k-1)^2 = 0,\ k = 1,\ x = 1$ ve $y = -1$ olmalıdır.

YANIT: $x = 1,\ y = -1\ ve\ z = 0$

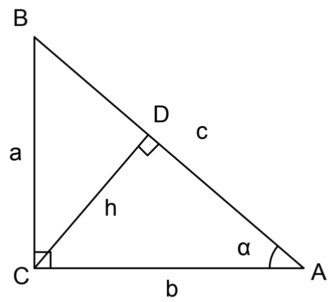
6-60) $x^2 - 2y^2 = 1$ denklemini sağlayan x ve y asal sayılarını bulunuz.

Çözüm: $x^2 = 1 + 2y^2$ olduğu için x tek sayıdır. ($x = 2n+1$). Bunu kullanarak $y^2 = 2(n^2+n)$ elde edilir. Yani, y nin çift sayı olması gerekmektedir. Çift olan asal sayı 2 dir. $y = 2 \Rightarrow x = 3$ bulunur.

YANIT: $x = 3,\ y = 2.$

7-60) Bir dik üçgende kenar uzunluklarının çarpımı yüksekliklerin çarpımının iki katı ise, üçgenin iç açıları kaç derecedir?

Çözüm:



$abc = 2hab \Rightarrow c = 2h, |AD| = h(\cot\alpha), |BD| = h(\tan\alpha)$
$c = |AD| + |BD| = h(\cot\alpha + \tan\alpha) = \cot\alpha + \tan\alpha = 2, \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

Yanıt: $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ya da $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$

8-60) $S = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} \ldots + \frac{n}{n^2}$ dizisinin $n \to \infty$ için limitini bulunuz.

Çözüm: $S = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n)$ şeklinde yazalım. O halde,
$S = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$ dir.
$\lim\limits_{n\to\infty} S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ bulunur.

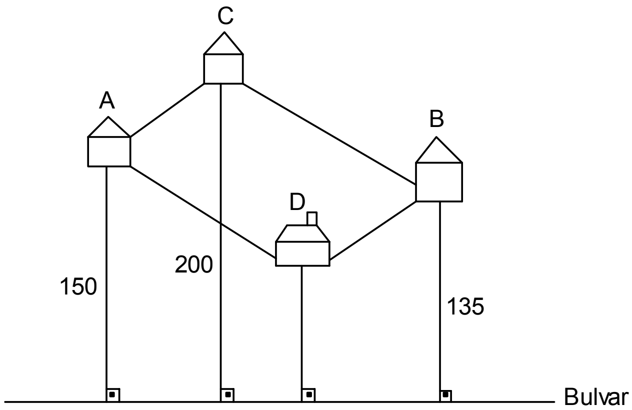
YANIT: $\frac{1}{2}$

9-60) $8x8$ lik bir satranç tahtasında $4x4$’ lük karelerin sayısı kaçtır?

Çözüm: Satranç tahtasını $(0,0), (0,8), (8,0), (8,8)$ koordinatlarıyla koordinat düzlemine yerleştirelim. $4x4$’ lük karelerin orjine en yakın köşesinin koordinatları (k, m) olsun. Birbirinden bağımsız olarak, k ve m’ nin $0, 1, 2, 3, 4$ değerleri aldığı açıktır. Dolayısıyla, istenen karelerin toplam sayısı $5 \cdot 5 = 25$ olur.

YANIT: 25

10-60)



Ali' nin (A), Berna' nın (B), Ceren' in (C) ve Deniz' in (D) evleri yukarıdaki krokide gösterildiği gibi yatay düzlemdeki bir paralelkenarın köşelerinde yer almaktadır. Ali' nin, Berna' nın ve Ceren'in evlerinin bulvara uzaklığı sırasıyla $150m, 135m$ ve $200m$' dir. Buna göre, Deniz' in evinin bulvara uzaklığı kaç m' dir?

Çözüm: Kolayca görülebilir ki, paralelkenar özelliğinden $200 - 150 = 135 - x$ eşitliği sağlanmalıdır. dolayısıyla aranan uzaklık $85m$ olur.

YANIT: 85

11-60) $a + b + c = 0$ ve $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ olduğuna göre $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ toplamı kaçtır?

Çözüm: Paydaları eşit olanları bir araya getirip toplarsak, $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$ elde edilir. $a + b + c = 0$ şartını kullanarak,
$\frac{-c}{c} + \frac{-b}{b} + \frac{-a}{a} = -3$ bulunur.

YANIT: -3

12-75) Bir sırada 8 koltuk bulunmaktadır. 5 kişi bu sıraya rasgele oturduğunda, yan yana bulunan 2 koltuğun ikisinin birden boş **olmama** olasılığı nedir?

Çözüm: Boş koltuklar sıranın başlarında veya 5 kişinin aralarında olabilir. Bir sıradaki 5 kişi 6 aralık belirledikleri ve 3 boş koltuk bu aralıklar arasından her aralıktan en çok bir tane seçilmek durumunda olduğundan istenen olay sayısı $\binom{6}{3}$ dur. Buna göre cevap,

$$\frac{\binom{6}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{5}{14}$$

olarak bulunur.

YANIT: $\frac{5}{14}$

13-75)

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 2010i^{2010} \text{ karmaşık sayısı kaçtır?}$$

Çözüm: Terimlerin reel kısımları toplamı

$$-2 + (4-6) + \ldots + (2008-2010) = -2 \cdot 503 = -1006,$$

sanal kısımları toplamı

$$1 + (-3+5) + \ldots + (2007-2009) = 1 + 2 \cdot 502 = 1005$$

olduğundan aranan sayı $1006 + 1005i$ olarak bulunur.

YANIT: $1006 + 1005i$

14-75) Türkiye milli futbol takımının 24 oyuncusu vardır. Avrupa şampiyonasında oynadığı 8 maçın her birinde 11 oyuncu oynamıştır. Fenerbahçeli futbolcuların her biri sadece 1 maçta oynamıştır. Bu durumda, milli takımda Fenerbahçe takımından olan en çok kaç futbolcu vardır?

Çözüm: Toplam FB' li sayısı n olsun. Sırasıyla $1., 2., \ldots, 8.$ maçta oynayan FB' li sayısı $K_1, K_2, \ldots, K_8$ ve. bu sayıların en küçüğü K_t olsun. Buna göre en az $(11 - K_t)$ tane diğer takım oyuncuları vardır ve dolayısı ile

$$8K_t \leq 24 - (11 - K_t) = 13 + K_t$$

yani $7K_t \leq 13$ ve $K_t \leq 1$ elde edilir.. Sonuç olarak, t-*inci* maçta FB' li olmayan 10 oyuncu vardır ve $n \leq 14$ olmalıdır. $n = 14$ örneğin,

$2+2+2+2+2+2+1+1$ şeklindeki dağılımdan görünür.

YANIT: 14

15-75)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm:

$$A_n = \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$$

dersek, her $n > 1$ için

$$1 < A_n \leq \frac{n^1 + n^2 + \ldots + n^n}{n^n} = \frac{1}{n^n} \bullet \frac{n^{n+1} - n}{n - 1} < \frac{n^{n+1}}{n^n} \bullet \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$1 < A_n < \frac{n}{n-1}$$

elde edilir. Sandwich teoremine göre,

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} A_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1$$

elde edilir.

YANIT: 1

16-75) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ için x ve y reel sayılar olmak üzere, $xy = sin(2t)$ ve $\frac{x}{y} = \tan(t)$ eşitlikleri sağlanıyorsa $x^2 + y^2$ kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \tan t + \frac{1}{\tan t}$$

eşitliği kullanılarak

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{\tan^2 t + 1}{\tan t} = \frac{1}{\sin t \cos t}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{x^2 + y^2}{\sin 2t} = \frac{1}{\sin t \cos t} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

bulunur.

YANIT: 2

17-75)

$$x + y - z = 2$$
$$xy + xz + yz = 3$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 15$$

olduğuna göre z sayısının alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Çözüm: $2(xy+xz+yz)=6$ denklemini $x^2+y^2+z^2=15$ denklemi ile toplarsak $(x+y+z)^2=21$ ve $x+y+z=\pm\sqrt{21}$ bulunur.

$$x+y-z=2\ ,\ x+y+z=\sqrt{21}$$

ve

$$x+y-z=2\ ,\ x+y+z=-\sqrt{21}$$

sistemlerinden

$$z_1=\frac{\sqrt{21}}{2}-1 \text{ ve } z_2=-\frac{\sqrt{21}}{2}-1$$

elde edilir. Buradan $z_1+z_2=-2$ bulunur.

YANIT: -2

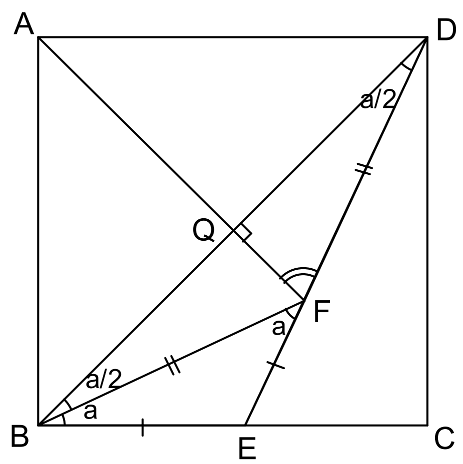
18-75) xy düzleminde, $(3,8)$ ve $(-5,2)$ noktalarını birleştiren doğru parçası, bir çemberin çapını göstermektedir. $(c,10)$ noktası bu çemberin üzerinde ise c kaçtır?

Çözüm: Çemberin merkezi $(3,8)$ ve $(-5,2)$ noktalarının orta noktası olup, $\frac{3-5}{2}=-1$ ve $\frac{8+2}{2}=5$ ten $(-1,5)$ bulunur. Yarıçap ise iki nokta arası uzaklığın yarısı olacağından, $\sqrt{(-5-3)^2+(2-8)^2}=10\Rightarrow r=5$ olur. Öyleyse çemberin denklemi $(x+1)^2+(y-5)^2=25$ elde edilir. $(c,10)$ noktası denklemde yerine konursa, $(c+1)^2=0\Rightarrow c=-1$ olarak bulunur.

Yanıt: -1

19-75) $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üstünde bir E noktası ve $[ED]$ üstünde bir F noktası için $|DF|=|BF|$ ve $|EF|=|BE|$ ise $m(\widehat{DFA})$ kaç derecedir?

Çözüm:

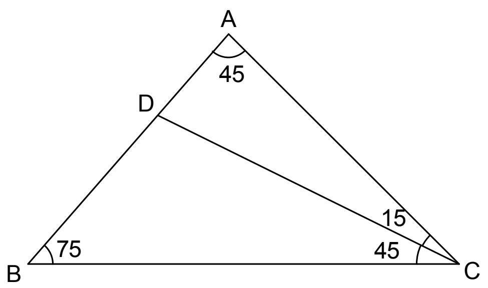


$m(\widehat{FBE}) = m(\widehat{EFB}) = a$ olarak alırsak $m(\widehat{FDB}) = m(\widehat{FBD}) = a/2$ olacağı açıktır. Buradan $m(DBE) = m(ADB) = 3a/2 = 45^\circ$, $a = 30^\circ$ bulunur. $ADFB$ dörtgenini incelersek bunun bir deltoit olduğu görülür. Deltoitlerde köşegenler dik olarak kesiştiği için $m(FQB) = 90^\circ$ olacaktır. DQF nin iç açıları incelenirse $m(DFA) = 75^\circ$ bulunur.

Yanıt: 75°

20-75) Bir ABC üçgeninde $m(A) = 45^\circ$, $m(B) = 75^\circ$ olsun. AB kenarı üzerinde $m(ACD) = 15^\circ$ olacak şekilde bir D noktası alınsın. $\frac{|AD|}{|BD|} = ?$

Çözüm:



Sinüs teoreminden

$\frac{|AD|}{\sin 15} = \frac{|CD|}{\sin 45}$ ve

$\frac{|BD|}{\sin 45} = \frac{|CD|}{\sin 75}$ yazılır.

Buradan da

$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{1}{2}$ bulunur.

Yanıt: $\frac{1}{2}$

21-90) $(x-1)f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x-1}$ ilişkisini sağlayan $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Verilen eşitlikte x yerine $\frac{1}{x}$ yazılırsa, aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$(x-1)f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x-1}$ (1)

$(\frac{1}{x} - 1)f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}-1}$

İkinci denklemi $\frac{x}{1-x}$ ile çarparsak,

$f(\frac{1}{x}) + \frac{x}{1-x}f(x) = (\frac{x}{1-x})^2$ (2)

elde edilir.

(1). denklemden (2). denklemi çıkarırsak $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ bulunur.

YANIT: $\frac{-1}{x-1}$

22-90)

$$x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17$$
$$x + xy + y = 5$$

denklem sisteminin tam sayılarda çözümünü bulunuz.

Çözüm: Her iki eşitliğin her iki tarafına 1 eklersek,
$x^3(y^3+1)+y^3+1 = 18$
$x(y+1)+(y+1) = 6$
elde edilir. Çarpanlara ayrıldığında, $(x^3+1)(y^3+1) = 18$
$(x+1)(y+1) = 6$ olur.
Bu ifadeler, taraf tarafa bölünürse,
$(x^2-x+1)(y^2-y+1) = 3$ bulunur. Burada çarpanların, 3 ya da 1 olma durumu ayrı ayrı incelendiğinde sadece $\{(1,2),(2,1)\}$ çözümlerinin verilen sistemi sağladığı görülür.

YANIT: $\{(1,2),(2,1)\}$

23-90) $P(x)$ polinomunu $(x-1)$ ile bölündüğünde 1, $(x-2)$ ile bölündüğünde 2 kalanını veren ve başkatsayısı 2 olan 3. dereceden bir polinomdur. $P(x)$' in sabit terimi -4 ise $x+1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm: Verilen bilgilerden polinom $P(x) = (x-1)(x-2)K(x)+x$ şeklinde yazılabilir. Burada, $K(x) = ax+b$,başkatsayısı da 2 olduğundan $K(x) = 2x+b$ olmalıdır.
$P(x) = (x-1)(x-2)(2x+b)+x$
$P(0) = -4$ ifadeleri kullanılarak $b = -2$, $P(-1)$ ise -25 bulunur.

YANIT: -25

24-90) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$x_1+x_2 = x_3^2\ ,\ x_2+x_3 = x_4^2\ ,\ x_3+x_4 = x_5^2\ ,\ x_4+x_5 = x_1^2\ ,\ x_5+x_1 = x_2^2$$

denklemleri sağlanıyorsa $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ nedir?

Çözüm:

$$min\{x_i\ :\ i = 1,2,3,4,5\} = x$$
$$max\{x_i\ :\ i = 1,2,3,4,5\} = y$$

ve $x_6 = x_1$ dersek, $x^2 = x_i+x_{i+1}$, $y^2 = x_j+x_{j+1}$ olacak şekilde $i,j \in \{1,2,3,4,5\}$ vardır.
Buradan, $x^2 \geq 2x$ ve $y^2 \leq 2y$ yani, $2 \leq x \leq y \leq 2$ olur. Dolayısıyla,
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2,2,2,2,2)$ elde edilir.

YANIT: $(2,2,2,2,2)$

25-90) $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ değişkenlerinden her biri diğerinden bağımsız olarak $1, 0, -1$ değerlerinden herhangi birini alabiliyor. Bu sayıların ikişerli çarpımlarının toplamının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ değişkenlerinin tüm mümkün ikişerli çarpımlar toplamına S

diyelim. Bu taktirde, $S = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2 + \ldots + x_{49})^2 - x_1^2 - \ldots - x_{49}^2]$ olur. Buradan, $S \geq \frac{-49}{2}$ olduğu görülür. S bir tam sayı olduğundan, $S \geq -24$ elde edilir. $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ değişkenlerinin 25 tanesine 1, geriye kalan 24 tanesine de -1 değerini verirsek $S = -24$ elde ederiz. Tam tersi olsa da durum değişmez.

Yanıt: -24

Yedek 1-60) b tam sayısı, a tam sayısının herhangi bir tam katı olmak üzere,

$$\log_{10}\left(\frac{b}{a}\right)^{b/2} + \log_{10}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{9a} = 1$$

ise $b^2 - a^2$ kaçtır?

Çözüm: $b = ka$ dönüşümü yapıp denklemi düzenlersek,

$$\frac{ka}{2}\log_{10}k - \frac{9a}{2}\log_{10}k = 1$$

ve buradan

$$\log_{10}k^{\left(\frac{ka-9a}{2}\right)} = 1 \text{ yani } k^{\left(\frac{ka-9a}{2}\right)} = 10$$

olur. a ve k tamsayı olduğundan, k sadece 10 olabilir. O zaman, $a = 2$, $b = 20$ ve $b^2 - a^2 = 396$ bulunur.

YANIT: 396

Yedek 2-75)
$$x^2 = y^3 - 5y^2 + 8y$$
$$y^2 = x^3 - 5x^2 + 8x$$

denklem sisteminin gerçel sayılardaki tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemleri taraf tarafa çıkaralım ve aşağıdaki gibi düzenleyelim:

$$x^3 - 4x^2 + 8x = y^3 - 4y^2 + 8y$$

$f(t) = t^3 - 4t^2 + 8t$ dersek $f(x) = f(y)$ elde ederiz. $f'(2) > 0$ ve $t \neq 2$ için,

$$f'(t) = 3t^2 - 8t + 8 \geq 2t^2 - 8t + 8 = 2(t^2 - 4t + 4)$$
$$= 2(t-2)^2 > 0$$

olduğundan f fonksiyonu kesin artan ve dolayısıyla birebir fonksiyondur.

O halde, $f(x) = f(y)$ eşitliğinden $x = y$ olur. Verilen sistemde $y = x$ yazarsak

$$x^2 = x^3 - 5x^2 + 8x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

elde edilir. Buradan denklemin gerçel kökleri $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ bulunur.

O halde, verilen denklem sisteminin çözümleri $(x,y) = (0,0), (2,2), (4,4)$ dür.

YANIT: $(0,0), (2,2), (4,4)$